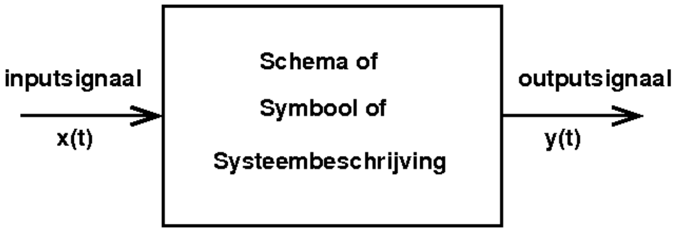
Jan Mooij 30 jan 2010

Systemen (systeemgrenzen en beschrijvingen)

Als een technicus spreekt over systemen gaat het meestal over technische systemen, die verschillende natuurkundige domeinen kunnen beslaan: elektrisch, mechanisch, hydraulisch, akoestisch, thermisch of mengvormen hiervan. Als je praat over een systeem moet je eerst de systeemgrens vaststellen en bepalen in welke aspecten van het systeem je geïnteresseerd bent.

Schema's helpen bij het inzichtelijk krijgen van een systeem en de bijbehorende grenzen. In een schema kan je aangeven wat de ingang en wat de uitgang van een systeem is.



Het gedrag van het systeem kan je vervolgens beschrijven door de relatie aan te geven tussen het ingangssignaal x(t) en het door x(t) veroorzaakte uitgangssignaal y(t) (= de responsie). Dat kan op een heleboel verschillende manieren. Favoriete ingangssignalen zijn:

- de **eenheidsstapfunctie e(t)** (e(t)=0 voor t<0 en e(t)=1 voor t>=0). De responsie op e(t) wordt **strapresponsie** genoemd.
- de eerste afgeleide hiervan, een oneindig sterke puls op t=0 met toch een eindig oppervlakte = 1, ook wel **Dirac delta functie of δ(t)** genoemd. De responsie op δ(t) wordt **(im)pulsresponsie** genoemd.
- een **periodieke sinus- of cosinusfunctie**. De responsie op een sinusvormig signaal is ook sinusvormig en heeft dezelfde frequentie, maar wel een andere amplitude en fase.

Het exacte gedrag van een werkelijk systeem is moeilijk goed te beschrijven omdat in werkelijkheid systemen zijn opgebouwd uit niet ideale componenten, die bij te groot ingangssignaal bijvoorbeeld kapot kunnen gaan. Toch kan je een heel eind komen door de voorstelling van een systeem te versimpelen en uit te gaan van wel ideale componenten, die net lineair gedrag vertonen. Wij beperken ons in deze cursus tot geïdealiseerde zich netjes gedragende **lineaire systemen**.

Definitie: *Een systeem is lineair als voor elk willekeurig ingangssignaal $x_i\ (t)$, waarvan het uitgangssignaal (responsie) $y_i\ (t)$ is, geldt dat de responsie op de som van alle ingangssignalen $\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\ (t)\right)$ gelijk is aan de som van de responsies van de afzonderlijke uitgangssignalen $\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i\ (t)\right)$. Deze definitie staat ook bekend onder de naam* ***superpositiebeginsel***. *Dus in andere woorden: een systeem is lineair als het superpositiebeginsel geldt.*

Dit heeft twee belangrijke consequenties:

1. Ken je de stapresponsie van een lineair systeem dan ben je in staat om de responsie op elk willekeurig ingangssignaal te bepalen, omdat elk willekeurig ingangssignaal te schrijven is als een som van in tijd verschoven stapfuncties met elk hun eigen grootte.
2. De (im)pulsresponsie is de eerste afgeleide van de stapresponsie.

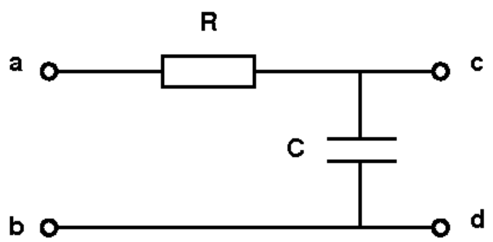
Waarom wil je dit allemaal weten? Omdat een goed ingenieur zich niet wil laten verrassen en een vinger wil krijgen achter het gedrag van het systeem in willekeurige voor het systeem ter zake doende omstandigheden. Maar je moet dan wel beschikken over een zodanige beschrijving van het systeem dat je er ook aan kunt rekenen al dan niet met behulp van een computer. En als je regelaars wilt toevoegen aan een systeem moet je weten hoe snel dit systeem is, ofwel wat de dynamische eigenschappen van het systeem zijn.

In deze cursus leer je beschrijvingen op te stellen van lineaire systemen en deze door te rekenen met behulp van computerprogramma’s (dynasim en mathcad) en leer je over de dynamica van deze systemen.

Systeembeschrijvingen zijn er in 3 soorten:

1. Een **schematische** voorstelling. Nadeel is dat je hier niet zonder meer aan kunt rekenen. Wel bestaan programma’s, die een schematische tekening als input gebruiken om vervolgens het gedrag door te rekenen. Deze programma’s zijn veelal domeingebonden, dus werken bijvoorbeeld alleen voor elektrische schakelingen of alleen voor mechanische constructies of alleen voor warmteproblemen. Anders moet je de juiste vergelijkingen opstellen uit de natuurkundige wetmatigheden die gelden voor de onderdelen en uit natuurkundige behoudswetten. Met Mathcad kan je dan soms verder komen.
2. Een **wiskundige** voorstelling. Een lineair systeem kan beschreven worden door een lineaire differentiaalvergelijking. Zulke vergelijkingen kunnen al dan niet met behulp van computerprogramma’s opgelost worden en geven je bijvoorbeeld de stapresponsie of de pulsresponsie of de responsie op een willekeurig inputsignaal. Fourier- en Laplacetransformaties komen hier om de hoek kijken. Ook hiermee weet Mathcad raad.
3. Een **natuurkundige** voorstelling door middel van een bondgraaf. Deze is gebaseerd op de energieuitwisseling tussen de componenten en is derhalve domeinonafhankelijk. Simulatieprogramma’s zoals dynasim en 20sim kunnen werken met bondgrafen.

Een eenvoudig voorbeeld is onderstaande RC schakeling. Het is een hoogfrequentafsnijdend filter:



De systeemgrenzen baken je af door de ingang en uitgang te benoemen. De ingang wordt hier gevormd door de klemmen ab, waarop de ingangsspanning x(t) aangesloten wordt en als uitgang kies ik hier de spanning over de condensator C ofwel de spanning over de klemmen cd. Je had ook als uitgang de stroom door de weerstand R kunnen kiezen of de temperatuur van de weerstand R (dan krijg je een gemengd elektrisch/thermisch systeem).

Er zijn verschillende wiskundige beschrijvingen van dit systeem mogelijk. Als je geïnteresseerd bent in de responsie op sinusvormige ingangssignalen komt de overdrachtsfunctie H(s) van pas. Met behulp van de 'potentiometerformule' uit de elektronica en met behulp van de complexe impedanties van R en C kan je afleiden dat

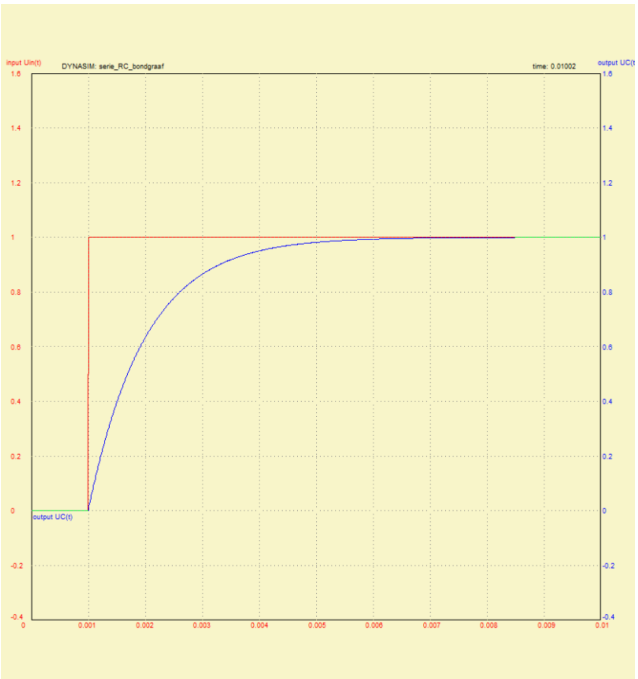
$$H(s) = \frac{1/_{sC}}{R + 1/_{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} \quad waarbij\ s = j\omega\ en\ \omega = 2\pi f$$

Hieruit kan de amplitude- en fasekarakteristiek, ofwel het Bodediagram worden bepaald met behulp van complexe getaltheorie.

Je kunt ook de differentiaalvergelijking van het systeem opstellen. Deze is te vinden door een Laplacetransformatie op H(s) toe te passen, hetgeen hier neerkomt op het vervangen van s door de differentiaal operator $\frac{d}{dt}$. Je krijgt dan:

$$H(s) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{1 + RC \cdot \frac{d}{dt}} \quad waaruit\ volgt{:}\ y(t) + RC \cdot \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

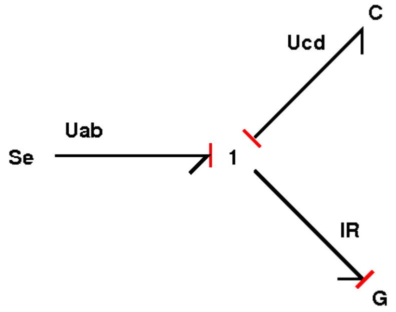
Voor een gegeven ingangssignaal x(t) is dan het uitgangssignaal y(t) te berekenen door bovenstaande eerste orde lineaire differentiaalvergelijking op te lossen. Als rand-voorwaarde moet y(0) dan nog opgegeven worden. Voor x(t)=1 en y(0)=0 komt er uit:$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\ met\ tijdconstante\ \tau = RC$



Dit is de iets in tijd opgeschoven stapresponsie van het RC filter, uitgerekend door dynasim voor R=1kΩ en C=1μF. 1 schaaldeel in horizontale richting is 1 msec.

NB: τ=RC=1 msec. hier!

De natuurkundige voorstelling van het RC filter is de bondgraaf:



Hier staat dat het ingangssignaal Uab als energiebron optreedt en dat het geleverde vermogen (energie per seconde) verdeeld wordt over een condensator C en een geleidingsvermogen G (dit is het omgekeerde van een weerstand R). De 1-junction staat voor het feit dat dezelfde stroom (IR) door Se, C en G gaat.

Op zowel de bondgraafbenadering als de wiskundige benadering wordt dieper ingegaan tijdens de cursus SYMO.